Álgebra I (MA – 2221)
Guía de Ejercicios Nº 5

1.- Determinar cuáles de los siguientes conjuntos con las operaciones dadas es un (i) Anillo, (ii) Anillo conmutativo, (iii) Anillo con identidad, (iv) Anillo de división.
(a) $A = \{a + b\sqrt{2}: a, b \in \mathbb{Q}\}$, suma y producto usuales.
(b) $A = \mathbb{Z}^2$ con la suma y el producto definidos por:
$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) \qquad (a,b)\cdot(c,d) = (ac, 0)$$
(c) $A = \mathbb{R}^2$ con la suma y el producto definidos por:
$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) \qquad (a,b)\cdot(c,d) = (ac, ad+bc)$$
(d) A es el conjunto de los números imaginarios puros con la suma y el producto usuales.
(e) $A = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ con la suma usual de funciones y donde el producto es la composición de funciones.
(f) $A = \{f: (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +): f\ es\ homomorfismo\}$, con la suma usual de funciones y donde el producto es la composición de funciones.
.

2.- Sea $A = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}: a, b \in \mathbb{Z}\right\}$
(a) Probar que A es un anillo con la suma y el producto usual de matrices.
(b) Probar que A tiene identidad izquierda pero no identidad derecha.
(c) Probar que A tiene infinitas identidades izquierdas.

3.- Sea $(A, +)$ un grupo abeliano. Probar que $(A, +, \cdot)$ es un anillo si se define $a \cdot b = 0_A$ para todos $a, b \in A$.

4.- Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo. Probar que para todos $a, b \in A$ se verifica que:
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

5.- Sea A un anillo tal que para todo $a \in A$ se verifica que $a^2 = a$. Probar que A es conmutativo.

6.- Determinar si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^{2x2}$ son subanillos. ¿Cuáles son ideales?
(a) $U = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}: a, b \in \mathbb{R}\right\}$
(b) $V = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}: a, b \in \mathbb{R}\right\}$
(c) $W = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}: a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$
(d) $S = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}: a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$

7.- Sea A un anillo y $a \in A$ un elemento fijo. Probar que $S_a = \{x \in A: ax = 0_A\}$ es un subanillo de A.

8.- Probar que la intersección de dos subanillos de un anillo A es un subanillo de A y que la intersección de dos ideales de un anillo A es un ideal de A.

9.- Sean I y J dos ideales de un anillo A y sea:
$$I + J = \{x + y: x \in I, y \in J\}.$$
Probar que $I + J$ es un ideal de A.

Prof. María Teresa Varela

10.- Sea A un anillo, S un ideal de A y:

$$r(S) = \{x \in A: xs = 0_A \; para \; todo \; s \in S\}$$

Probar que $r(S)$ es un ideal de A.

11.- Probar que si S un ideal de un anillo con identidad A y $1_A \in S$, entonces $S = A$.

12.- Sea A un anillo conmutativo y $r \in A$. Sea:

$$Ar = \{ar: \; a \in A\}$$

(a) Probar que Ar es un ideal de A.
(b) Probar que si A tiene identidad entonces $r \in A$ es invertible si y solo si $Ar = A$

13.- Sea el anillo $(A, +, \cdot)$, donde $A = \{(a, b, -b, a): \; a, b \in \mathbb{Z}\}$ y la suma y multiplicación están definidas por:

$$(a, b, -b, a) + (c, d, -d, c) = (a + c, b + d, -b - d, a + c)$$

$$(a, b, -b, a) \cdot (c, d, -d, c) = (ac - bd, ad + bc, -ad - bc, ac - bd)$$

Determinar si la función $f: A \to \mathbb{Z}$ definida por $f(a, b, -b, a) = a$ es un homomorfismo de anillos.

14.- Sean los anillos $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ y $(A, +, \cdot)$ donde $A = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\}$ con la suma y el producto usual de matrices. Sea $f: \mathbb{C} \to A$ definida por:

$$f(a + bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Determinar si f es un isomorfismo.

15.- Sea $(\mathbb{Q}, *, \triangle)$, donde las operaciones están definidas por:

$$a * b = a + b - 1 \;\text{ y }\; a \triangle b = a + b - ab$$

Determinar si $(\mathbb{Q}, *, \triangle)$ es un cuerpo.

16.- Sea $f: A \to A'$ un epimorfismo de anillos. Probar que:
(a) Si A es conmutativo, entonces A' es conmutativo.
(b) Si A tiene elemento identidad 1_A, entonces A' tiene elemento identidad $f(1_A)$.
(c) Si S es un ideal de A, entonces $f(S)$ es un ideal de A'.

17.- Probar que un anillo conmutativo A es un dominio de integridad si y solo si para todos $a, b, c \in A$, con $a \neq 0_A$, la relación $ab = ac$ implica que $b = c$.

18.- Probar que todo cuerpo es un dominio de integridad.

19.- Un elemento a en un anillo A se llama nilpotente si $a^n = 0_A$ para algún entero positivo n. Probar que en un dominio de integridad el único elemento nilpotente es 0_A.

Prof. María Teresa Varela